Section A1 (programme M')

MATHEMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

Dans tout le problème p désigne un nombre premier strictement supérieur à 3, $\mathbb{Z}_p$ l'anneau-quotient de $\mathbb{Z}$ formé des classes résiduelles modulo p et $\bar{n}$ la classe modulo p de l'entier n.

Si A *est un anneau fini, unitaire d'unité* e, *on appelle ordre d'un élément inversible* a *de* A *le plus petit entier strictement positif* n *tel que* $a^n = e$.

Pour toute matrice carrée M *à coefficients dans un corps, on note* $\Delta(M)$ *son déterminant et* $T(M)$ *sa trace.*

I

1° Soit A_p l'ensemble des matrices, à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$, de la forme $R = \lambda M + \mu I$, où $M = \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{1} \\ -\bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$, λ et μ dans $\mathbb{Z}_p$.

Montrer que A_p est un anneau commutatif unitaire pour les opérations usuelles. Donner le nombre des éléments de A_p.

2° Calculer $T(R)$ et $\Delta(R)$ pour R dans A_p ; puis exprimer $T(R^2)$ et $\Delta(R^2)$ en fonction de $T(R)$ et $\Delta(R)$.

3° Montrer que deux quelconques des conditions suivantes impliquent la troisième :

a. $T(R) = \bar{0}$,

b. $\Delta(R) = \bar{1}$,

c. l'ordre de R est 4.

4° On considère la suite des entiers Y_k, $k \geqslant 0$, définie par $Y_0 = 2$, et $Y_{k+1} = 2\,Y_k^2 - 1$, $k \geqslant 0$. Comparer Y_k et $T(M^{2^k})$.

5° Montrer que M est d'ordre 2^k si et seulement si p divise Y_{k-2}.

II

1° Montrer que A_p est un corps si et seulement si $\bar{3}$ n'est pas le carré d'un élément de $\mathbb{Z}_p$.

2° Dans cette question on suppose que $\bar{3}$ est un carré dans $\mathbb{Z}_p$ (avec $\bar{3} = a^2$, $a \in \mathbb{Z}_p$). Montrer que M est semblable à une matrice diagonale. En déduire que A_p est isomorphe à l'anneau produit $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, puis donner le nombre des éléments de A_p de déterminant $\bar{1}$, ainsi que celui de ses éléments inversibles.

3° Dans cette question on suppose que $\bar{3}$ n'est pas un carré dans $\mathbb{Z}_p$.

a. Montrer que Δ donne un homomorphisme du groupe multiplicatif des éléments non nuls de A_p dans celui des éléments non nuls de $\mathbb{Z}_p$. En déduire que le nombre des éléments de l'image de Δ est un diviseur de $p - 1$ et que celui des éléments du noyau de Δ est un multiple de $p + 1$.

b. Vérifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ il y a au plus deux éléments μ de $\mathbb{Z}_p$ tels que $\Delta(\lambda M + \mu I) = \bar{1}$. Donner alors le nombre des éléments de A_p de déterminant $\bar{1}$.

4° Montrer que l'ordre de M divise le nombre des éléments de A_p de déterminant $\bar{1}$. En déduire que, si p divise Y_{k-2}, alors 2^k divise $p - 1$ ou $p + 1$.

III

On suppose dans cette partie que p est de la forme $2^m - 1$.

1° Montrer que m est impair et que 3 divise $p - 1$. Établir aussi que $\bar{2}$ est un carré dans $\mathbb{Z}_p$ et que $-\bar{1}$ n'en est pas un.

2° Montrer que les ordres des éléments non nuls de $\mathbb{Z}_p$ divisent $p - 1$ mais ne divisent pas tous $(p-1)/3$. En déduire qu'il existe un élément b de $\mathbb{Z}_p$ d'ordre 3. Calculer $(2b + \bar{1})^2$.

3° Montrer que ni $\bar{3}$ ni $\bar{6}$ ne sont des carrés dans $\mathbb{Z}_p$. Prouver que les ordres des éléments de A_p de déterminant $\bar{1}$ divisent 2^m mais ne divisent pas tous 2^{m-1}.

.30. E.N.S.E.T. 1979

4° Résoudre l'équation $X^2 = M$, $X \in A_p$.

5° Quel est l'ordre de M ?

IV

1° Établir le critère suivant :

Soit q un entier supérieur ou égal à 3 ; alors $2^q - 1$ est premier si et seulement si $2^q - 1$ divise Y_{q-2}.

2° Décomposer Y_3 en facteurs premiers.

N. B. — *Les questions* III.1° *et* III. 2° *sont indépendantes des parties* I *et* II.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail